«تقدیم به

روان پاک پدر و مادرم

حسین هاشمی طاهری»

«تقدیم به

مادرم که بعد از خدا هر چه دارم از اوست

فرخ فرشیان»

مقدمه ناشر

به طور کلی میشه گفت یه علم فیزیکی بوده که هر جا توش می‌موندن و نمی‌تونستن مسائل رو حل کنن یه عده دانشمند بلند می‌شدن می‌رفتن تو علم ریاضیات یه چیز جدیدی رو به ریاضی اضافه می‌کردن!

مثلن آقای نیوتون برای محاسبه‌کردن سرعت لحظه‌ای ساعت‌ها و روزها با خودش کلنجار رفته گفته چی‌کار کنم! چی‌کار نکنم! آها برم تو ریاضیات مفهوم مشتق رو اضافه کنم! نیوتون آدم بزرگی بوده و خب مجبور بوده مشتق رو ابداع کنه! شما ببخشینش و خواهشن خیلی بدوبیراه بهش نگین! مرسی.

خلاصه که میشه گفت علم ریاضی کاملاً برآمده از متن زندگی ما و برای حل‌شدن مشکلات زندگی انسانه! پس دیگه لطفا نگین چرا ما باید مشتق بخونیم؟ چرا لگاریتم بخونیم؟ چرا؟ چرا؟

از اساتید عزیز و بزرگوار: آقایان هاشمی طاهری و فرشیان برای تألیف این کتاب خوب و مفید بسیار سپاس‌گزاریم.

مقدمه مؤلفان

وقتی پیشنهاد شد تا کتابای جیبی ریاضی هر سه سال تجربیو بنویسم، یاد دانش‌آموزایی افتادم که همش می‌گن:

«آقا درس ریاضی سخته و زیاد، تازه‌شم ما کارای مهم‌تریم داریما یه چیزایی بگین تا نمره‌شو بیاریمو درکشم بکنیم»

پیش خودم گفتیم دم خیلی‌سبزیا گرم! زدن تو خال.

حالا دُرسته که اینا جوجه کتابن، اما ضرب‌المثلی می‌گه «فلفل نبین چه ...»

شمام بشکنیدش تا نتیجشو ببینین! واسه این ادعامونم سه دلیل عمده دارم:

اولنش: درس‌نامه‌ش کافیه و کامل؛ یعنی هر چه از کتاب درسی بخواین تو اینم هستش، پس یه جزوهٔ درسی کامله.

دومنش: بعد از هر مطلب درسی، مثال یا مثالایی آوردیم که حسابی اون درس حالیمون بشه، تازه سؤالاتشم از ساده می‌ره تا یه کمی سخت.

سومنش: آخرای هر فصل، آزمونایی ده‌سؤاله اومده که می‌تونین خودتونو با اونا بسنجین، پس واسه شرکت تو آزمونام مناسبه.

دیگه چی می‌خواین؟

فهرست

فصل (۱)

تابع

درس ۱

توابع چندجمله ای - توابع صعودی و نزولی

توابع چندجمله‌ای

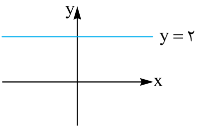
هر تابع به صورت $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ را که در آن a_n، a_{n-1}، ...، a_2، a_1 و a_0 اعداد حقیقی، n یک عدد صحیح نامنفی و $a_n \neq 0$ باشد، یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n می‌نامیم.

دامنهٔ توابع چندجمله‌ای، مجموعهٔ اعداد حقیقی است $(D_f=\mathbb{R})$؛ به عنوان مثال تابع $f(x)=3x^2+5x-1$، یک تابع از درجهٔ دو و تابع $f(x)=\frac{x^6}{4}+5x^3+2$ یک تابع از درجهٔ شش می‌باشد و دامنهٔ هر دو تابع $\mathbb{R}$ است.

انواع توابع چندجمله‌ای

۱- تابع ثابت

تابع چندجمله‌ای از درجهٔ صفر که به صورت $f(x)=k\,;\,(k\in\mathbb{R})$ باشد را تابع ثابت می‌گوییم. برای رسم تابع ثابت $f(x)=k$، به اندازهٔ k روی محور yها حرکت کرده و از آن‌جا خطی موازی محور xها رسم می‌کنیم؛ به عنوان مثال در شکل روبه‌رو تابع ثابت $f(x)=2$ رسم شده است.

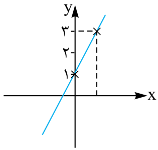


۲- تابع خطی

یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ یک است که ضابطهٔ آن به صورت $f(x)=ax+b\,;\,(a\neq 0)$ می‌باشد. در این تابع، ضریب x (یعنی a) شیب

خط و b عرض از مبدأ می‌باشد و برای رسم آن داشتن دو نقطهٔ دلخواه کافی است؛ به عنوان مثال در شکل مقابل تابع $f(x)=2x+1$ رسم شده است.

x	۰	۱
y	۱	۳



۳- تابع چندجمله‌ای درجه‌دوم

ضابطهٔ این تابع به صورت $f(x)=ax^2+bx+c\,;\,(a\neq 0)$ است و نمودار آن سهمی نام دارد. برای رسم آن باید رأس سهمی را از فرمول $S\left|\begin{matrix}-\dfrac{b}{2a}\\ -\dfrac{\Delta}{4a}\end{matrix}\right.$ یا $S\left|\begin{matrix}-\dfrac{b}{2a}\\ f(-\dfrac{b}{2a})\end{matrix}\right.$ به دست آوریم. سپس با رسم یک جدول و قراردادن رأس سهمی در آن، یک عدد بزرگ‌تر و یک عدد کوچک‌تر از طول رأس سهمی در جدول قرار داده و عرض آن را به دست آورده و نمودار را رسم می‌کنیم. اگر $a>0$، آن‌گاه دهانهٔ سهمی رو به بالا و اگر $a<0$، دهانهٔ آن رو به پایین است.

مثال

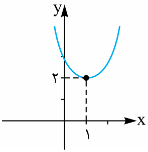
نمودار تابع درجه‌دوم $f(x)=x^2-2x+3$ را رسم کنید.

پاسخ ابتدا مختصات رأس سهمی را مشخص می‌کنیم.

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{(-2)}{2(1)}=1 \Rightarrow y=f(1)=1^2-2(1)+3=2$$

$$\Rightarrow S(1,2)$$

x	۰	۱	۲
y	۳	۲	۳



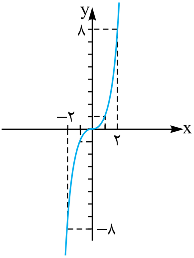
۴- تابع درجه‌سوم

تابع چندجمله‌ای با ضابطهٔ $f(x)=ax^{۳}+bx^{۲}+cx+d$ که در آن $a\neq ۰$ باشد، تابعی درجه‌سوم است. دامنه و برد این تابع مجموعهٔ اعداد حقیقی هستند.

نمودار $y=x^{۳}$

به کمک نقطه‌یابی، نمودار $y=x^{۳}$ را رسم می‌کنیم.

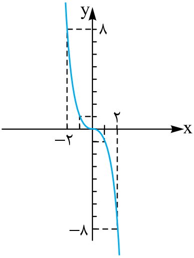
x	−۲	−۱	۰	۱	۲
y	−۸	−۱	۰	۱	۸



نمودار $y=-x^{۳}$

به کمک نقطه‌یابی، نمودار $y=-x^{۳}$ را رسم می‌کنیم.

x	−۲	−۱	۰	۱	۲
y	۸	۱	۰	−۱	−۸



از دو نمودار فوق می‌توان دریافت که نمودار $y=-x^{۳}$ قرینهٔ نمودار $y=x^{۳}$ نسبت به محور yها است.

برای یادآوری مطالب انتقال می‌توانید به قسمت انتقال توابع مراجعه کنید.

مثال

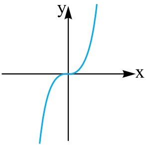
نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید:

الف) $y=(x-۱)^{۳}$

ب) $y=-x^{۳}+۱$

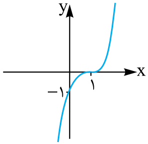
پ) $y=(x-۲)^{۳}+۱$

پاسخ الف)



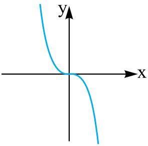
$y = x^{۳}$

یک واحد در
جهت مثبت xها →



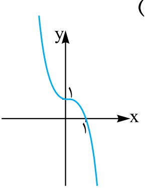
$y = (x - ۱)^{۳}$

ب)



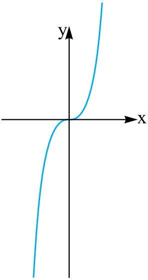
$y = -x^{۳}$

یک واحد در
جهت مثبت yها →



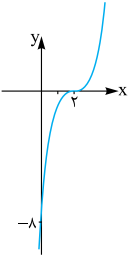
$y = -x^{۳} + ۱$

پ)

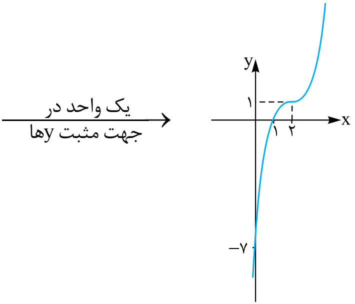


$y = x^{۳}$

۲ واحد در
جهت مثبت xها →

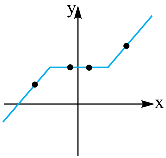


$y = (x - ۲)^{۳}$



$y=(x-۲)^{۳}+۱$

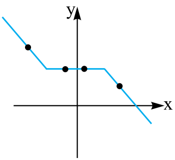
تابع صعودی



اگر برای هر دو نقطهٔ $x_۱$ و $x_۲$ از مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ با فرض $x_۱<x_۲$ داشته باشیم $f(x_۱)\leq f(x_۲)$، آن‌گاه f را در مجموعهٔ A تابعی صعودی می‌نامیم.

$$x_۱<x_۲ \Rightarrow f(x_۱)\leq f(x_۲)$$

تابع نزولی

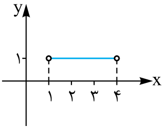


اگر برای هر دو نقطهٔ $x_۱$ و $x_۲$ از مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ با فرض $x_۱<x_۲$ داشته باشیم $f(x_۱)\geq f(x_۲)$، آن‌گاه f را در مجموعهٔ A تابعی نزولی می‌نامیم.

$$x_۱<x_۲ \Rightarrow f(x_۱)\geq f(x_۲)$$

تابع یکنوا

اگر تابعی در یک بازه، فقط صعودی یا فقط نزولی باشد، می‌گوییم تابع در آن بازه یکنوا است.



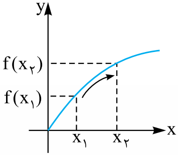
نکته تابع f را در یک بازه ثابت می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر x در این بازه، مقدار f ثابت باشد. مانند تابع $f(x)=۱$ با دامنهٔ $D=(۱,۴)$.

این تابع در بازهٔ $(۱,۴)$ ثابت است؛ زیرا:

$$۱<x_۱<x_۲<۴ \Rightarrow f(x_۱)=f(x_۲)=۱$$

نکته تابع ثابت $(k\in\mathbb{R}, f(x)=k)$ در یک بازه هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.

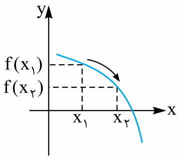
◁ تابع اکیداً صعودی



اگر برای هر دو نقطهٔ $x_۱$ و $x_۲$ از مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ با فرض $x_۱<x_۲$ داشته باشیم $f(x_۱)<f(x_۲)$، آن‌گاه f را در مجموعهٔ A تابعی اکیداً صعودی می‌نامیم.

$$x_۱<x_۲ \Rightarrow f(x_۱)<f(x_۲)$$

◁ تابع اکیداً نزولی



اگر برای هر دو نقطهٔ $x_۱$ و $x_۲$ از مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ با فرض $x_۱<x_۲$ داشته باشیم $f(x_۱)>f(x_۲)$، آن‌گاه f را در مجموعهٔ A تابعی اکیداً نزولی می‌نامیم.

$$x_۱<x_۲ \Rightarrow f(x_۱)>f(x_۲)$$

تابع اکیداً یکنوا

اگر تابعی در یک بازه، فقط اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، می‌گوییم تابع در آن بازه اکیداً یکنوا است.

نکته | توابع اکیداً یکنوا همواره یکنوا نیز هستند به این معنی که تابع اکیداً صعودی (یا نزولی)، صعودی (یا نزولی) هم هست، اما عکس این مطلب درست نیست؛ یعنی تابع صعودی (یا نزولی)، لزوماً اکیداً صعودی (یا اکیداً نزولی) نیست.

مثال

کدام‌یک از توابع زیر اکیداً صعودی است؟

۱) $f = \{(۱,۳),(۲,۵),(۳,۷),(۴,۱۲)\}$

۲) $g = \{(۱,۱۰),(۲,۸),(۳,۵),(۴,۲)\}$

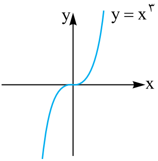
۳) $k = \{(۱,۵),(۲,۷),(۳,۷),(۴,۱۰)\}$

۴) $h = \{(۱,۱۰),(۲,۸),(۳,۸),(۴,۵)\}$

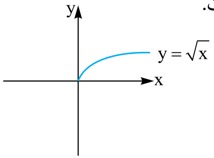
پاسخ | گزینهٔ ۱ در همهٔ گزینه‌ها، زوج‌های مرتب طوری نوشته شده‌اند که xها از کوچک به بزرگ باشند. در تابع k هر y یا از y قبلی خود بزرگ‌تر است یا با آن مساوی است، پس تابع صعودی است ولی اکیداً صعودی نیست؛ در حالی که در تابع f هر y از قبلی خود بزرگ‌تر است، پس تابع f اکیداً صعودی است. واضح است که تابع g اکیداً نزولی است. تابع h نزولی است اما اکیداً نزولی نیست، زیرا $۳ > ۲$ ولی $h(۲) = h(۳)$.

چند تابع مهم اکیداً یکنوا

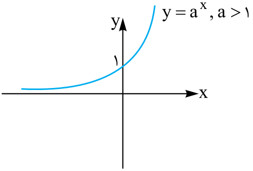
۱) تابع $y = x^۳$: این تابع اکیداً صعودی است.

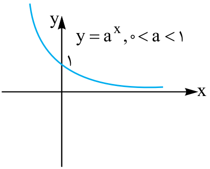


۲) تابع $y=\sqrt{x}$: این تابع اکیداً صعودی است.

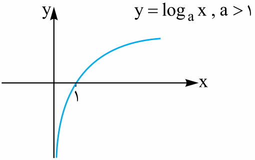


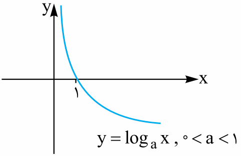
۳) تابع $y=a^x$: این تابع با شرط $a>۱$ (مانند $y=۲^x$) تابعی اکیداً صعودی و با شرط $۰<a<۱$ (مانند $y=(\frac{۱}{۲})^x$) تابعی اکیداً نزولی است.



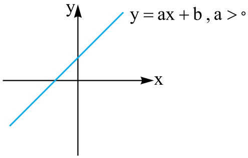


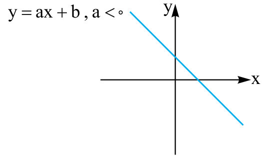
۴) تابع $y=\log_a x$: این تابع با شرط $a>۱$ (مانند $y=\log_۲ x$) تابعی اکیداً صعودی و با شرط $۰<a<۱$ اکیداً نزولی است.



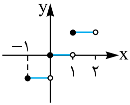


۵) تابع خطی $y=ax+b$: این تابع با شرط $a>۰$ (مانند $y=۲x+۱$) اکیداً صعودی و با شرط $a<۰$ (مانند $y=-۳x+۲$) تابعی اکیداً نزولی است.

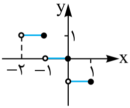




نکته | تابع $y = [x]$ تابعی صعودی و نمودار آن به صورت مقابل است:



همین‌طور تابع $y = [-x]$ تابعی نزولی و نمودار آن به صورت مقابل است:



مثال

نمودار توابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آن‌ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است مشخص کنید:

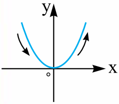
الف) $y = x^2$

ب) $y = \sin x \quad (0 \le x \le 2\pi)$

پ) $y = x|x|$

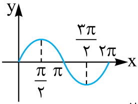
ت) $f(x) = \begin{cases} x+1 & x < -2 \\ -1 & -2 < x < 1 \\ -2x & x > 1 \end{cases}$

پاسخ | الف) نمودار تابع $y = x^2$ به شکل مقابل است:



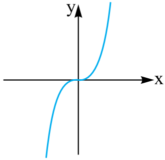
مشاهده می‌شود که تابع در بازهٔ $(-\infty,\circ)$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $(\circ,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

ب) نمودار تابع $y=\sin x$ به شکل مقابل است:



مشاهده می‌شود که تابع در بازهٔ $(\circ,\frac{\pi}{۲})$ و $(\frac{۳\pi}{۲},۲\pi)$ اکیداً صعودی و در بازهٔ $(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ اکیداً نزولی است.

پ) نمودار تابع $y=x|x|$ یا $y=\begin{cases}x^۲ & x\geq\circ\\ -x^۲ & x<\circ\end{cases}$ به شکل مقابل است:



مشاهده می‌شود که تابع در بازهٔ $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

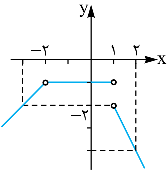
ت) هر یک از ضابطه‌های تابع $f(x)=\begin{cases}x+۱ & x<-۲\\ -۱ & -۲<x<۱\\ -۲x & x>۱\end{cases}$ نیم‌خط یا پاره‌خط هستند و نمودار آن به شکل زیر است:

$y=x+۱$

x	−۳	−۲
y	−۲	−۱

$y=-۲x$

x	۱	۲
y	−۲	−۴



ازروی‌نمودارمشاهده‌می‌کنیدکه‌تابع‌دربازهٔ $(-\infty,-2)$ اکیداً‌صعودی‌است، در بازهٔ $(-2,1)$ ثابت است (هم صعودی و هم نزولی) و در بازهٔ $(1,+\infty)$ اکیداً نزولی است.

نکته ۱ اگر تابع‌های f و g صعودی باشند، آن‌گاه تابع $f+g$ صعودی است؛ مثلاً تابع $k(x)=2x+[x]$ که در آن تابع خطی $f(x)=2x$ صعودی ($m=2>0$ شیب خط) و تابع $g(x)=[x]$ صعودی است، پس تابع $k(x)$ نیز صعودی است.

۲ اگر تابع‌های f و g نزولی باشند، آن‌گاه تابع $f+g$ نزولی است. به عنوان مثال؛ تابع $k(x)=-x^3-2x$ نزولی است، زیرا توابع $f(x)=-x^3$ و $g(x)=-2x$ هر دو نزولی هستند.

۳ اگر تابع f صعودی باشد، تابع $-f$ نزولی است و برعکس یعنی اگر f تابعی نزولی باشد، تابع $-f$ صعودی است. به عنوان مثال تابع $f(x)=x^3$ تابعی صعودی است، اما $f(x)=-x^3$ نزولی می‌باشد.

مثال

تابع $f(x)=(-9+k^2)x^3+5$ اکیداً نزولی است. مجموع مقادیر صحیح k چه‌قدر است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۶

پاسخ گزینهٔ ۱ توابعی به صورت $y=ax^3+b$ زمانی اکیداً نزولی هستند که ضریب درجه‌سوم، منفی باشد پس باید داشته باشیم:

$$-9+k^2<0 \Rightarrow k^2<9 \Rightarrow -3<k<3$$

مقادیر صحیح k در این بازه، عبارت‌اند از $-2,-1,0,1,2$ و مجموع آن‌ها صفر است.

پرسش های تستی

۱- نمودار $y=(x-1)^3+2$ از کدام ناحیه عبور نمی‌کند؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۲- تابع $f=\{(-2,3m-1),(2,m+4),(1,5)\}$ اکیداً صعودی است. حدود m کدام است؟

۱) $m>1$ ۲) $m>\frac{3}{2}$ ۳) $1<m<2$ ۴) $m<2$

۳- تابع $y=x^2|x|$ در بازهٔ $(-\infty,a]$ نزولی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

۱) صفر ۲) 1 ۳) -1 ۴) -2

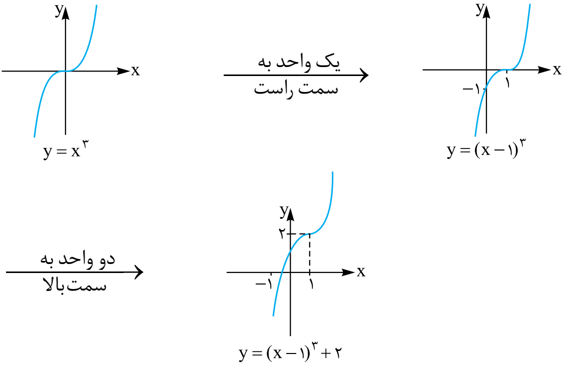
۴- کدام‌یک از توابع زیر، در بازهٔ $[2,\pi]$ اکیداً صعودی است؟

۱) $y=|x-4|$ ۲) $y=|\sin x|$

۳) $y=x^2-8x+16$ ۴) $y=x|x|$

پاسخ پرسش‌های تستی

۱- گزینهٔ «۴» نمودار $y=x^{۳}$ را رسم می‌کنیم، سپس نمودار را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار $y=(x-۱)^{۳}$ حاصل شود و در نهایت ۲ واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار $y=(x-۱)^{۳}+۲$ حاصل شود. مشاهده می‌کنیم که این تابع از ناحیهٔ چهارم عبور نمی‌کند.



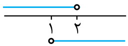
۲- گزینهٔ «۳» xها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم. در این صورت در تابع اکیداً صعودی هر y از قبلی خود باید بزرگ‌تر باشد.

$$f=\{(-۲,۳m-۱),(۱,۵),(۲,m+۴)\}$$

در نتیجه: $۳m-۱<۵<m+۴$

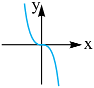
$$\begin{cases}۳m-۱<۵\\ m+۴>۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۳m<۶\\ m>۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m<۲\\ m>۱\end{cases}$$

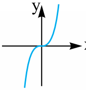
$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} ۱<m<۲$$



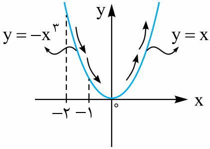
۳- گزینهٔ «۱» ابتدا نمودار $y=x^۲|x|$ را رسم می‌کنیم:

$$y=\begin{cases}x^۲(x) & x\ge ۰\\ x^۲(-x) & x<۰\end{cases}\Rightarrow y=\begin{cases}x^۳ & x\ge ۰\\ -x^۳ & x<۰\end{cases}$$

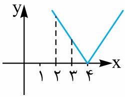
نمودار $y=-x^۳$ به صورت  است که روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است و

نمودار $y=x^۳$ به صورت  است که روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی

است؛ در نتیجه تابع $y=-x^۳$ در بازهٔ $(-\infty,۰]$ اکیداً نزولی است، پس بیشترین مقدار a، برابر صفر است.

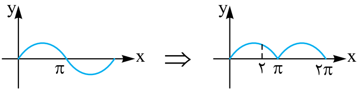


۴- گزینهٔ «۴» هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:



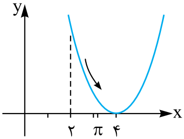
گزینهٔ (۱): نمودار تابع به شکل مقابل است. π عددی بین ۳ و ۴ است، پس در بازهٔ $[۲,\pi]$ این تابع اکیداً نزولی است.

گزینهٔ (۲): با توجه به نمودار زیر، تابع $|\sin x|$ در بازهٔ $[۲,\pi]$ تابع اکیداً نزولی است.

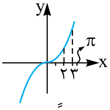


$y=\sin x$ $\qquad$ $y=|\sin x|$

گزینهٔ (۳): نمودار تابع $y=x^{۲}-۸x+۱۶=(x-۴)^{۲}$ ، به صورت شکل صفحهٔ بعد است و با توجه به شکل می‌بینیم که تابع در بازهٔ $[۲,\pi]$ اکیداً نزولی است.



گزینهٔ (۴):



$$y=x|x|=\begin{cases} x^{۲} & x\geq ۰ \\ -x^{۲} & x<۰ \end{cases}$$

در بازهٔ $[۲,\pi]$ تابع اکیداً صعودی است.